1. Векторски простори. Линеарна зависност, базис и димензионалност

Један од предмета изучавања овог курса биће уопштавање одређених појмова који леже у основи класичне анализе. У овом поглављу биће дефинисан појам векторског простора, као пример **апстрактног простора** (термин *апстрактан* биће понекад изостављан), што би био скуп дате математичке структуре.

Основни елемент апстрактне алгебре јесте скуп апстрактних математичких објеката на којима је дефинисана одређена операција. Ради се пре свега о *бинарним операцијама*[1], које повезују уређене парове математичких објеката са одговарајућим резултатима операције

$$a+b=c\,,\;\; a\cdot b=c\,,\;\;\; a,b,c,d\in\mathbb{R}\,.$$

Може се уочити да горе наведене операције одређеним елементима датог скупа придружују елементе истог тог скупа.

С друге стране, пример унарне операције било би, рецимо, *комплексно коњуговање*: $z=x+iy$, $z^{*}=x-iy$.

Међу скуповима са једном бинарном операцијом најзначајније су **групе**.

[1] **Бинарна операција** је свака функција из $\mathbb{S}\times\mathbb{S}$ у $\mathbb{S}$, тј. свака *унутрашња операција* (синоними: *алгебарска операција*, *композиција*), која повезује два елемента из Декартовог производа два непразна скупа $\mathbb{S}$ са трећим елементом из тог истог скупа $\mathbb{S}$.

Дефиниција 1.1. Група је скуп $\mathbb{G}$ апстрактних математичких објеката, на коме је дефинисана једна бинарна операција, нпр. $\odot$, за коју важе следеће особине

i) *асоцијативност*

$$\alpha\odot(\beta\odot\gamma)=(\alpha\odot\beta)\odot\gamma, \quad \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{G},$$

ii) постојање *неутралног елемента*

$$\alpha\odot e=e\odot\alpha=\alpha, \quad \alpha,e\in\mathbb{G},$$

iii) постојање *инверзног елемента*

$$a\odot\beta=\beta\odot\alpha=e, \quad \alpha,\beta,e\in\mathbb{G}.$$

Ако група има и четврту особину:

iv) *комутативност*

$$\alpha\odot\gamma=\gamma\odot\alpha, \quad \alpha,\gamma\in\mathbb{G}$$

онда се она назива *Абеловом* (*комутативном*) групом.

Пример 1.1.1. Скуп свих реалних бројева $\mathbb{R}$ без нуле образује Абелову групу $\mathbb{G}=\left\{\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot\right\}$ у односу на бинарну операцију обичног множења бројева; 1 - неутрални (јединични) елемент, $1/x$ - инверзни елемент.

Пример 1.1.2. Скуп свих целих бројева $\mathbb{Z}$ образује Абелову групу $\mathbb{G}=\{\mathbb{Z},+\}$ у односу на бинарну операцију обичног сабирања; 0 - неутрални (нулти) елемент, $-z$ - инверзни елемент.

Контра-пример. Скуп свих природних бројева $\mathbb{N}$ не образује групу у односу на бинарну операцију сабирања, будући да нису задовољене аксиоме **ii)** и **iii)** **дефиниције 1.1**.

Дефиниција 1.2. Скуп $\mathbb{F}$ коме су придружене две бинарне операције $\{\mathbb{F},\otimes,\odot\}$ назива се *пољем* ако важи

i) уређени пар $\{\mathbb{F},\otimes\}$ представља *Абелову групу* чији је неутрални (нулти) елемент 0;

ii) уређени пар $\{\mathbb{F}\setminus\{0\},\odot\}$ представља *Абелову групу* чији је неутрални (јединични) елемент 1;

iii) *закон дистрибуције*: $\alpha\odot(\beta\otimes\gamma)=\alpha\odot\beta\otimes\alpha\quad\gamma$, $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{F}$.

Пример 1.2.1. Поље реалних бројева $\mathbb{R}$ са бинарним операцијама обичног сабирања и множења.

Пример 1.2.2. Поље комплексних бројева $\mathbb{C}$ са бинарним операцијама обичног сабирања и множења.

Дефиниција 1.3. Линеарни векторски простор $\mathbb{V}$ јесте било какав скуп математичких елемената исте врсте, за које су дефинисане следеће алгебарске операције

$\oplus$ - *сабирање вектора* (уобичајено је да се елементи скупа $\mathbb{V}$ називају *векторима*)

$\circ$ - *множење вектора скаларом* (*скалари* су елементи поља $\mathbb{F}$)

ако $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{F}$ и $\forall \left|v_1\right\rangle, \left|v_2\right\rangle, \left|v\right\rangle \in \mathbb{V}$ [2] важи да

i) $\left\{\mathbb{V}, \oplus\right\}$ има структуру *Абелове групе*

ii) $\left\{\mathbb{F}, +, \cdot\right\}$ има структуру *поља*

iii) $\alpha \circ \left(\beta \circ \left|v\right\rangle\right) = (\alpha \cdot \beta)\ \left|v\right\rangle$ - *асоцијативни закон* (у односу на множење вектора скаларом)

iv) $\alpha \circ \left(\left|v_1\right\rangle \oplus \left|v_2\right\rangle\right) = \alpha \circ \left|v_1\right\rangle \oplus \alpha\ \left|v_2\right\rangle$ - *дистрибутивни закон* (множења једним скаларом збира вектора)

v) $(\alpha + \beta) \circ \left|v\right\rangle = \alpha \circ \left|v\right\rangle \oplus \beta\ \left|v\right\rangle$ - *дистрибутивни закон* (множења збиром скалара једног вектора)

vi) $1 \circ \left|v\right\rangle = \left|v\right\rangle$ - јединични елемент поља истовремено је и јединични елемент у односу на множење вектора скаларом.

Треба истаћи да се одредница »линеарни« која је последица аксиома **iv)** и **v)** горње дефиниције врло често изоставља (у овом курсу увек ће бити речи о линеарним векторским просторима, ЛВП).

Напомена: код овде уведеног појма линеарног векторског простора небитан је тип математичких објеката, као ни конкретни вид правила сабирања вектора и множења вектора скаларом; једино је важно да поменута правила задовољавају дефи-

[2] Скалари ће бити означавани малим словима грчког алфабета, а вектори искључиво симболом Диракове нотације $\left|v\right\rangle$; у случају више вектора, симбол ће бити индексиран природним бројем.

ниционе аксиоме. Рецимо, поље $\{\mathbb{F}, +, \cdot\}$ може представљати поље реалних, али и поље комплексних бројева.

Пример 1.3.1. Класични вектори у тродимензионалном простору:

$$\vec{v} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)\,.$$

Поменути простор означава се са $\mathbb{R}^3$ или са $\mathbb{E}^3$ (у **примеру 1.3.2** биће јаснији разлог за овај начин означавања; наравно, тројка у индексу јасна је сама по себи - то је број димензија[3] простора), а назива се *Еуклидовим простором*.

Пример 1.3.2. Скуп $\mathbb{C}^n = \mathbb{C}\times\mathbb{C}\times.\ \times$, где $\times$ означава Декартов (*Descartes*) или директни производ скупова (операција се понавља $n-1$ пута); то је скуп уређених $n-$торки комплексних бројева: $|v\rangle = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, $\xi_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Скуп $\mathbb{C}^n$ у односу на сабирање вектора и множење вектора скаларом, датих као

$$\begin{matrix} |v_1\rangle \oplus |v_2\rangle = (\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2, \ldots, \xi_n + \eta_n) \\ \alpha \circ |v\rangle = (\alpha\,\xi_1, \alpha\,\xi_2, \ldots, \alpha\,\xi_n) \end{matrix}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{C},\ \forall |v_1\rangle, |v_2\rangle \in \ ^n \tag{1.1}$$

представља један векторски простор. Неутрални (нулти) вектор је $|0\rangle = (0, 0, \ldots, 0)$ док је инверзни вектор вектора $|v\rangle$ управо $-|v\rangle = (-\xi_1, -\xi_2, \ldots, -\xi_n)$.

Аналогно се дефинише простор $\mathbb{R}^n$. Тада $\mathbb{R}^3$ представља Еуклидов простор.

Пример 1.3.3. Скуп матрица типа $m\times n$ чини векторски простор $\mathbb{F}^{mn}$ (једним симболом представљени простори $\mathbb{R}^{mn}$ и $\mathbb{C}^{mn}$). Заиста, ако су матрице из тог скупа дате као: $\mathscr{A} = [a_{ij}]$ и $\mathscr{B} = [b_{ij}]$, имамо:

$$\alpha \circ \mathscr{A} \oplus \beta \circ \mathscr{B} = \alpha \circ [a_{ij}] \oplus \beta\ \ [b_{ij}] = [\alpha\, a_{ij}] \oplus [\beta\, b_{ij}] = [\alpha\, a_{ij} + \beta\, b_{ij}] \in \mathbb{F}^{mn}\,.$$

Напомена: Обратити пажњу на чињеницу да је $\mathbb{F}^{m1} \equiv \mathbb{F}^m$.

[3] Овде се користи интуитивна представа о појму димензије, који ће у **потпоглављу 1.2.** бити строго дефинисан.

Пример 1.3.4. Скуп $\mathbb{L}^p$ свих бесконачних низова $|v\rangle = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots)$, таквих да важи израз

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p < \infty .$$

Горњи услов потребан је због бесконачног броја сабирака, чиме се у ова разматрања уводе проблеми конвергенције. Уз тај услов, изрази

$$\begin{aligned} |v_1\rangle \oplus |v_2\rangle &= (\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2, \ldots, \xi_n + \eta_n, \ldots) \\ \alpha \circ |v\rangle &= (\alpha\, \xi_1, \alpha\, \xi_2, \ldots, \alpha\, \xi_n, \quad) \end{aligned}$$

имају смисла.

Јасно је да се ради о уопштеним облицима формула (1.1) из $\mathbb{C}^n$, односно, по крајњој мери, релација из $\mathbb{R}^3$.

Да би било показано да је скуп $\mathbb{L}^p$ линеарни векторски простор, потребно је само показати да је он затворен у односу на сабирање својих елемената (вектора) - остало по аналогији следи на основу **примера 1.3.2**. За тај поступак потребна је релација Минковског за суме (видети Мушицки, Милић, *Математичке основе теоријске физике* [3] и Аљанчић, *Увод у реалну и функционалну анализу*, [7])

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n} |\gamma_i + \delta_i|^p \right\}^{\frac{1}{p}} \leq \left\{ \sum_{i=1}^{n} |\gamma_i|^p \right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{ \sum_{i=1}^{n} |\delta_i|^p \right\}^{\frac{1}{p}}, \quad p \geq 1 \tag{1.2}$$

Нека су сада $|v_1\rangle, |v_2\rangle \in \mathbb{L}^p$, тада је

$$\alpha \circ |v_1\rangle \oplus \beta \circ |v_2\rangle = (\alpha\, \xi_1 + \beta\, \eta_1, \alpha\, \xi_2 + \beta\, \eta_2, \ldots, \alpha\, \xi_n + \beta\, \eta_n, \quad),$$

те треба само утврдити конвергира ли десна страна горње једнакости. На основу релације Минковског (1.2) биће

$$\begin{aligned} \left\{ \sum_{i=1}^{n} |\alpha\, \xi_i + \beta\, \eta_i|^p \right\}^{\frac{1}{p}} &\leq \left\{ \sum_{i=1}^{n} |\alpha\, \xi_i|^p \right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{ \sum_{i=1}^{n} |\beta\, \eta_i|^p \right\}^{\frac{1}{p}} \\ &= |\alpha| \left\{ \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^p \right\}^{\frac{1}{p}} + |\beta| \left\{ \sum_{i=1}^{n} |\eta_i|^p \right\}^{\frac{1}{p}} \end{aligned} \tag{1.3}$$

Како у датом примеру $n \to \infty$, то десна страна формуле (1.3) сигурно конвергира, а самим тим конвергира и њена лева страна; **закључак:** $\alpha \circ |v_1\rangle \oplus \beta \circ |v_2\rangle \in \mathbb{L}^p$.

Пример 1.3.5. Скуп $\mathbb{C}[a,b]$ свих функција $f = f(t)$ дефинисаних и непрекидних на сегменту $a \le t \le b$. Сабирање у овом скупу је уобичајено сабирање функција (збир две непрекидне функције и сам је непрекидна функција), док је множење функција скаларом уствари уобичајено множење функција бројем (производ непрекидне функције и броја и сам је непрекидна функција).

Биће наведена два потпростора векторског простора $\mathbb{C}[a,b]$ (прецизнија дефиниција потпростора датог векторског простора биће дата нешто касније, у **поглављу 7**).

$\mathbb{P}^k[a,b]$ - скуп свих полинома највише $k-$тог степена;

$\mathbb{C}[b-a]$ - скуп свих периодичних функција са периодом $b-a$.

Пример 1.3.6. Скуп $\mathbb{C}^p(a,b)$ свих непрекидних функција чији интеграл

$$\int_a^b |f(t)|^p dt \, , \, p \ge 1$$

конвергира, односно

$$\mathbb{C}^p(a,b) = \left\{ f(t) \colon \int_a^b |f(t)|^p dt < \infty \right\}.$$

Скуп је затворен у односу на сабирање функција, које је бинарна операција, те је реч о линеарном векторском простору.

Контра-пример. Скуп свих полинома $k-$тог степена; наиме, збир два таква полинома може имати степен мањи од k, те стога сабирање елемената скупа није бинарна операција, значи да није у питању линеарни векторски простор.

У току излагања овог курса, биће неопходно радити са једном још апстрактнијом структуром него што је векторски простор; стога ће она бити дефинисана на овом месту.

Дефиниција 1.4. Линеарни векторски простор $\mathbb{A}$ над пољем $\mathbb{F}$ постаје *алгебра с јединицом* над пољем $\mathbb{F}$ ако је

i) у линеарном векторском простору $\mathbb{A}$ дефинисана још једна бинарна операција која се назива *множење*: $|v_1\rangle \odot |v_2\rangle,\ \forall |v_1\rangle, |v_2\rangle \in \mathbb{A}$, са следећим особинама

$$\left(|v_1\rangle \odot |v_2\rangle\right) \odot |v_3\rangle = |v_1\rangle (\ \left(|v_2\rangle \quad |v_3\rangle\right)$$ - *асоцијативност*

$$|v_1\rangle \odot \left(|v_2\rangle \oplus |v_3\rangle\right) = |v_1\rangle \odot |v_2\rangle \oplus |v_1\rangle \quad |v_3\rangle$$ - *дистрибутивност* у односу на сабирање

плус *додатна особина*

$$\alpha \circ \left(|v_1\rangle \odot |v_2\rangle\right) = \left(\alpha \circ |v_1\rangle\right) \odot |v_2\rangle = |v_1\rangle \quad \left(\alpha \quad |v_2\rangle\right),\ \forall \alpha \in \mathbb{F},\ \forall |v_1\rangle, |v_2\rangle \in \mathbb{A};$$

ii) у простору $\mathbb{A}$ постоји вектор $|i\rangle$ који се назива *јединицом*, чија је карактеристична особина

$$|i\rangle \odot |v\rangle = |v\rangle (\ |i\rangle = |v\rangle,\ \forall |v\rangle \in \mathbb{A}.$$

Сада ће бити доказана следећа теорема:

Теорема 1.1. У произвољном векторском простору важи

1) Производ произвољног елемента $|v\rangle$ поменутог простора и броја 0 једнак је нултом елементу $|0\rangle$

2) Инверзни елемент било ког елемента $|v\rangle$ простора једнак је производу тог елемента и броја -1.

Доказ.

1) Нека је $|v\rangle$ произвољни елемент простора, док је $|\tilde{v}\rangle$ њему инверзни елемент. Тада је

$$0\circ\left|v\right\rangle = 0\circ\left|v\right\rangle \oplus \left|0\right\rangle = 0\circ\left|v\right\rangle \oplus \left(\left|v\right\rangle \oplus \left|\tilde{v}\right\rangle\right) \overset{\text{asoc.}}{=} \left(0\ \ \left|v\right\rangle \oplus \left|v\right\rangle\right) \oplus \left|v\right\rangle$$
$$= \left(0\circ\left|v\right\rangle \oplus 1\circ\left|v\right\rangle\right) \oplus \left|\tilde{v}\right\rangle = (0+1)\circ\left|v\right\rangle \oplus \left|\tilde{v}\right\rangle = 1\ \ \left|v\right\rangle \oplus \left|v\right\rangle = \left|v\right\rangle \oplus \left|v\right\rangle = \left|0\right\rangle$$

односно

$$0\circ\left|v\right\rangle = \left|0\right\rangle .$$

2) Нека је $\left|v\right\rangle$ произвољан елемент простора, док је $\left|\tilde{v}\right\rangle = (-1)\circ\left|v\right\rangle$. Онда је

$$\left|v\right\rangle \oplus \left|\tilde{v}\right\rangle = \left|v\right\rangle \oplus (-1)\circ\left|v\right\rangle = 1\circ\left|v\right\rangle \oplus (-1)\circ\left|v\right\rangle = (1-1)\ \ \left|v\right\rangle = 0\ \ \left|v\right\rangle = \left|0\right\rangle$$

те је очигледно да је $\left|\tilde{v}\right\rangle = (-1)\circ\left|v\right\rangle$ заиста инверзни елемент од $\left|v\right\rangle$.

Q.E.D.

1.1. Линеарна зависност

Појам *базиса* простора већ је помињан у оквиру елементарних курсева математике (у случају класичних вектора своди се на ортове), али ће овде ипак бити наведено неколико прелиминарних појмова.

Дефиниција 1.5. *Линеарна комбинација* елемената из векторског простора $\mathbb{V}$ над пољем $\mathbb{F}$ $\left\{\left|v_i\right\rangle : i=\overline{1,n}\right\}$ јесте сума производа тих елемената и произвољних бројева из поља $\mathbb{F}$

$$\sum_i \alpha_i \left|v_i\right\rangle = \alpha_1\left|v_1\right\rangle + \alpha_2\left|v_2\right\rangle + \ldots + \alpha_n\left|v_n\right\rangle \tag{1.4}$$

где су α_1, α_2, ..., α_n било који бројеви из поља $\mathbb{F}$, док се вредности сумационог индекса крећу од 1 до n.

Дефиниција 1.6. Елементи скупа вектора $\{|v_i\rangle\}$ из векторског простора $\mathbb{V}$ над пољем $\mathbb{F}$ *линеарно су независни* када је линеарна комбинација (1.4) једнака нултом елементу простора $\mathbb{V}$ ако и само ако су $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$, односно ако формула

$$\sum_i \alpha_i |v_i\rangle = |0\rangle \tag{1.5}$$

имплицира да је $\alpha_i = 0$, $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Елементарни став. Ако се међу векторима $\{|v_i\rangle\}$ налази нулти вектор, ти вектори сасвим сигурно јесу *линеарно зависни*. Заиста, ако је $|v_1\rangle = |0\rangle$ следи да је $\alpha_1 \neq 0$, те чак и ако је $\alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$, према **дефиницији 1.6.** скуп је линеарно зависан.

Теорема 1.2. Да би скуп ненултих вектора $\{|v_i\rangle : i = \overline{1, n}\}$ из векторског простора $\mathbb{V}$ над пољем $\mathbb{F}$ био линеарно зависан, потребан и довољан услов је да један од тих вектора буде линеарна комбинација осталих вектора.

Доказ.

Потребност: Нека су елементи скупа $\{|v_i\rangle\}$ линеарно зависни, тј. нека важи једнакост (1.5), у којој је барем један од бројева α_i различит до нуле, рецимо први: $\alpha_1 \neq 0$. Ако се формула (1.5) подели са α_1, следи

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_1}|v_1\rangle = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}|v_2\rangle + \ldots + \frac{\alpha_n}{\alpha_1}|v_n\rangle \tag{1.6}$$

а након увођења ознака: $\lambda_2 = \alpha_2/\alpha_1, \ldots, \lambda_n = \alpha_n/\alpha_1$, добија се израз

$$|v_1\rangle = \lambda_2 |v_2\rangle + \ldots + \lambda_n |v_n\rangle . \tag{1.7}$$

Значи да се вектор $|v_1\rangle$ може представити као линеарна комбинација преосталих ненултих вектора $|v_2\rangle, \ldots, |v_n\rangle$ датог скупа.

Довољност: Нека је један од вектора, нпр. $|v_1\rangle$, представљен као линеарна комбинација осталих, формулом (1.7), коју је могуће преписати у облику

$$(-1)|v_1\rangle+\lambda_2|v_2\rangle+\ldots+\lambda_n|v_n\rangle=|0\rangle. \tag{1.8}$$

Будући да међу бројевима $(-1), \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ свакако нису сви једнаки нули, то формула (1.8) изражава линеарну зависност вектора $|v_i\rangle$.

Q.E.D.

Королар. Ако је неки подскуп скупа $\{|v_i\rangle\}$ линеарно зависан, онда је читав поменути скуп линеарно зависан.

Нека су вектори $|v_2\rangle, \ldots, |v_n\rangle$ линеарно зависни; тада се пише

$$\alpha_2|v_2\rangle+\ldots+\alpha_n|v_n\rangle+. \quad =|0\rangle.$$

У горњој формули по дефиницији нису сви скалари $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ једнаки нули; стога, чак и ако им се дода скалар $\alpha_1=0$, и даље важи формула (1.5).

Из тог разлога се бесконачан скуп вектора сматра *линеарно зависним*, ако постоји његов коначан подскуп који је *линеарно зависан*; с друге стране, бесконачан скуп вектора је *линеарно независан* ако је ***сваки*** његов коначан подскуп *линеарно независан*.

1.2. Димензија линеарног векторског простора. Појам базиса

Мада је до сада коришћен појам димензионалности линеарног векторског простора схватан интуитивно, дошао је тренутак да он буде прецизније дефинисан, уопштавањем тродимензионалног случаја.

Дефиниција 1.7. Линеарни векторски простор је $n-$*димензионалан*, ако у њему постоји највише n линеарно независних вектора, док је сваки скуп од $n+1$ вектора сигурно линеарно зависан. Ако је број линеарно независних вектора бесконачан, линеарни векторски простор је *бесконачно-димензионалан*.

Очигледно је да се појам димензије може лако уопштити, те је помоћу њега могуће дефинисати и нешто у тој мери апстрактно као што су то бесконачно димензионални простори[4]. Наиме, у оквиру овог курса, простор се схвата напросто као скуп одређене математичке структуре, те га није потребно (нити могуће у случају $n > 3$) ни замислити. Будући да се у теоријској физици често барата с таквим апстрактним појмовима, од сада ће, тамо где је то могуће, под простором бити подразумеван његов коначно-димензионалан и бесконачно-димензионалан случај; када то не буде могуће (када разликовање буде неопходно), то ће увек бити посебно наглашено. Због тога ће се у дефиницији базиса простора кренути од појма *линеала*.

Дефиниција 1.8. Линеал је подскуп одређеног линеарног векторског простора $\mathbb{V}$, такав да је затворен на операције сабирања вектора и множења вектора скаларом коначан број пута, односно то је скуп свих елемената $|v\rangle \in \mathbb{V}$, датих као

$$|v\rangle = \alpha_1 |\mathrm{e}_1\rangle + \alpha_2 |\mathrm{e}_2\rangle + \ldots + \alpha_n |\mathrm{e}_n\rangle ;$$

избор скалара $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ је произвољан, док је скуп $|\mathrm{e}_1\rangle, |\mathrm{e}_2\rangle, \ldots, |\mathrm{e}_n\rangle \in \mathbb{V}$ линеарно независан.

Ознака за линеал над датим скупом је $\mathbb{L}\left(|\mathrm{e}_1\rangle, |\mathrm{e}_2\rangle, \ldots, |\mathrm{e}_n\rangle\right)$.

Пример 1.8.1. У случају класичних вектора, један линеал би био $\mathbb{L}(\vec{\mathrm{e}}_1, \vec{\mathrm{e}}_2)$, а сачињавали би га сви вектори типа: $\vec{v} = \alpha_1 \vec{\mathrm{e}}_1 + \alpha_2 \vec{\mathrm{e}}_2$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.

Пример 1.8.2. Линеал над бесконачно много линеарно независних непрекидних функција: $|v_1(t)\rangle = 1$, $|v_2(t)\rangle = t$, $|v_3(t)\rangle = t^2$, ..., у простору $\mathbb{C}[a, b]$ скуп је свих полинома.

[4] У савременој физици се барата и са просторима који немају целобројне димензије. Нпр. у физици фрактала Хаусдорфова (*Hausdorff*) димензија може износити 2/3, итд.

Дефиниција 1.9. (прва дефиниција базиса) Ако се линеал $\mathbb{L}(|\mathrm{e}_1\rangle, |\mathrm{e}_2\rangle, \ldots, |\mathrm{e}_n\rangle)$ над датим скупом линеарно независних елемената поклапа са целим линеарним векторским простором $\mathbb{V}$ каже се да ти елементи образују простор; у том случају, скуп $\{|\mathrm{e}_1\rangle, |\mathrm{e}_2\rangle, \ldots, |\mathrm{e}_n\rangle\}$ чини *базис* простора $\mathbb{V}$.

Другачије речено, *базис је линеарно независан скуп који образује простор*.

То да елементи скупа $\{|\mathrm{e}_1\rangle, |\mathrm{e}_2\rangle, \ldots, |\mathrm{e}_n\rangle\}$ образују простор у ствари значи да се у коначно-димензионалном случају може сваки елемент простора написати у облику

$$|v\rangle = \xi_1 |\mathrm{e}_1\rangle + \xi_2 |\mathrm{e}_2\rangle + \ldots + \xi_n |\mathrm{e}_n\rangle = \sum_{i=1}^{n} \xi_i |\mathrm{e}_i\rangle . \tag{1.9}$$

Напомена: И у бесконачно-димензионалном случају постоји нешто слично, али да би то било показано мора се, због проблема конвергенције, доказати теорема Рис-Фишера (*Riesz-Fisher*, **поглавље 4**).

Иначе, векторски простор јесте *коначно-димензионалан* ако има *коначан* број базисних вектора (у том случају се број базисних вектора и димензионалност поклапају), у противном је *бесконачно-димензионалан*.

Формула (1.9) назива се и *разлагањем вектора* $|v\rangle$ *по базису* $\{|\mathrm{e}_i\rangle : i = \overline{1,n}\}$, а такође може послужити и као **друга дефиниција базиса**. Тада се бројеви ξ_i, по аналогији са тродимензионалним случајем, називају *координатама* (*Фуријеовим коефицијентима*) вектора $|v\rangle$.

1.3. Изоморфност векторских простора

Главна предност увођења линеарних векторских простора уопште, а у физици посебно, јесте њихова међусобна *изоморфност*[5] - та особина омогућава да се под одређеним условима прелази из једног простора у други, да би се тамо на једноста-

[5] Грчки ***ισοσ*** - *исто*, ***μορφη*** - *облик*; изоморфан значи истог облика, а могло би се рећи и истих особина.

внији начин добили одговарајући резултати, а који важе у свим изоморфним просторима.

Дефиниција 1.10. Нека су $\mathbb{V}(\mathbb{F})$ и $\mathbb{V}^{\#}(\mathbb{F})$ два векторска простора чије елементе повезује *бијекција*[6] $f: |v\rangle^{\#} = f\left(|v\rangle\right)$, $|v\rangle \in \mathbb{V}$, $|v\rangle^{\#} \in \mathbb{V}^{\#}$, таква да је

$$f\left(\alpha_1 \circ |v_1\rangle \oplus \alpha_2 \circ |v_2\rangle\right) = \alpha_1 \circ f\left(|v_1\rangle\right) \oplus \alpha_2 \quad f\left(|v_2\rangle\right),$$

односно таква да важи израз

$$|v_1\rangle \bullet |v_2\rangle \leftrightarrow |v_1\rangle^{\#} \bullet |v_2\rangle^{\#},$$

где $\bullet$ означава бинарну операцију *унутрашње композиције* у просторима $\mathbb{V}$ и $\mathbb{V}^{\#}$; уз то

$$\alpha \circ |v\rangle \leftrightarrow \alpha \circ |v\rangle^{\#}.$$

Тада се оваква бијекција назива *изоморфизмом*.

Користи од изоморфизама биће изнете у овом и наредним поглављима на једноставнијем случају коначно-димензионалних линеарних векторских простора, премда оне постоје и у случају бесконачно-димензионалних простора, што ће се касније видети, у **потпоглављу 4.2**.

Теорема 1.3. Сваки $n-$димензионални линеарни векторски простор $\mathbb{V}^n$ над пољем $\mathbb{F}$, $\mathbb{V}^n(\mathbb{F})$, *изоморфан* је са простором $\mathbb{F}^{n1}$: $\mathbb{V}^n(\mathbb{F}) \cong \mathbb{F}^{n1}$.

Доказ.

Нека је $\{|\mathrm{e}_1\rangle, |\mathrm{e}_2\rangle, \ldots, |\mathrm{e}_n\rangle\}$ дати базис у простору $\mathbb{V}^n(\mathbb{F})$. На основу формуле (1.9) је

$$|v\rangle = \sum_{i=1}^{n} \xi_i |\mathrm{e}_i\rangle, \quad \forall |v\rangle \in \mathbb{V}^n(\mathbb{F}).$$

[6] **Бијекција** је пресликавање које је истовремено и 1-1 и НА (*сурјекција*), видети [10].

Координате ξ_i једнозначно су одређене. Заиста, ако се претпостави да постоје друге координате ς_i, такве да је

$$\left|v\right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \varsigma_i \left|\mathrm{e}_i\right\rangle, \quad \forall \left|v\right\rangle \in \mathbb{V}^n(\mathbb{F})$$

биће, као последица линеарне независности вектора скупа $\left\{\left|\mathrm{e}_1\right\rangle, \left|\mathrm{e}_2\right\rangle, \ldots, \left|\mathrm{e}_n\right\rangle\right\}$

$$\left|v\right\rangle - \left|v\right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \left|\mathrm{e}_i\right\rangle - \sum_{i=1}^{n} \varsigma_i \left|\mathrm{e}_i\right\rangle = \sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \varsigma_i) \left|\mathrm{e}_i\right\rangle = \left|0\right\rangle$$

те је јасно да је

$$\xi_i = \varsigma_i \,.$$

Тиме што су координате ξ_i једнозначно одређене остварена је *бијекција*

$$\left|v\right\rangle \leftrightarrow \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}$$

између $\mathbb{V}^n$ и $\mathbb{F}^{n1}$, која ће бити означена као

$$f\left(\left|v\right\rangle\right) = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix},$$

и представљена матрицом-колоном[7].

Нека сада буде изабран други вектор

$$\left|\tilde{v}\right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \eta_i \left|\mathrm{e}_i\right\rangle \in \mathbb{V}^n \,.$$

Будући да је

[7] Није неопходно да то буде матрица-колона! Математичари често бирају матрицу-врсту за представљање вектора $\left|v\right\rangle$. Међутим, у физичарској литератури се, као последица Диракове нотације, искључиво полази од матрица-колона.

$$\alpha_1 |v\rangle + \alpha_2 |\tilde{v}\rangle = \alpha_1 \sum_{i=1}^{n} \xi_i |\mathrm{e}_i\rangle + \alpha_2 \sum_{i=1}^{n} \eta_i |\mathrm{e}_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_1 \xi_i + \alpha_2 \eta_i) |\mathrm{e}_i\rangle ,$$

биће

$$f\left(\alpha_1 |v\rangle + \alpha_2 |\tilde{v}\rangle\right) = \begin{bmatrix} \alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \eta_1 \\ \vdots \\ \alpha_1 \xi_n + \alpha_2 \eta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \xi_1 \\ \vdots \\ \alpha_1 \xi_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_2 \eta_1 \\ \vdots \\ \alpha_2 \eta_n \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \\ \xi_n \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \\ \eta_n \end{bmatrix} .$$

Дакле, бијекција f, добијена одговарајућим избором базиса у $\mathbb{V}^n$, заиста јесте изоморфизам.

Q.E.D.

Изоморфизам из **теореме 1.3.** назива се *репрезентовањем* вектора из простора $\mathbb{V}^n(\mathbb{F})$ помоћу вектора из простора $\mathbb{F}^{n1}$, а које остварено одговарајућим избором базиса у $\mathbb{V}^n(\mathbb{F})$.

Иначе, поменути изоморфизам представља ***релацију еквиваленције***: *рефлексиван* је, *симетричан* и *транзитиван*.